



ce
pre
UNI

Trigonometría

COORDENADAS POLARES

CICLO
PRE 2024-I



Introducción

Algunas curvas con propiedades importantes no son fáciles de representar ni analizar a partir de una ecuación cartesiana, por ello buscaremos una nueva forma de la ecuación.

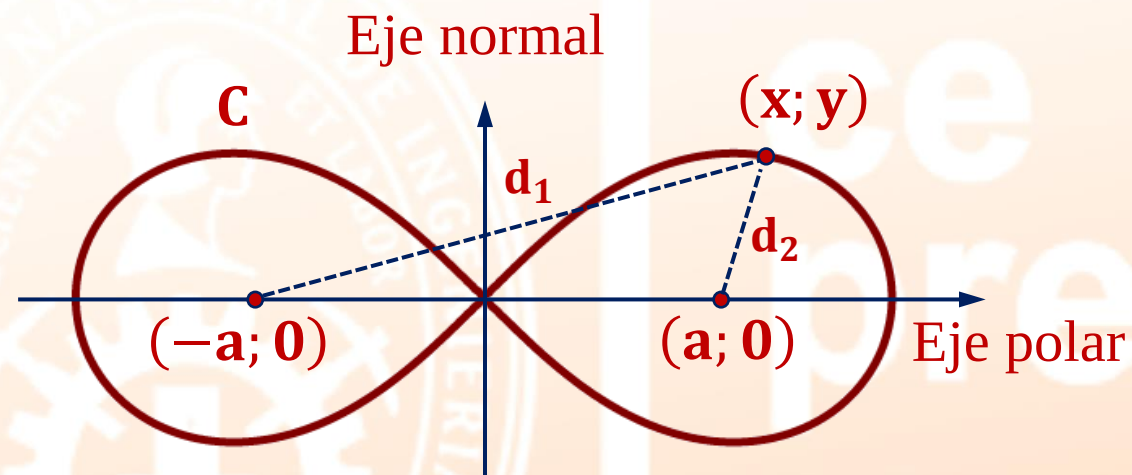
Por ejemplo la lemniscata de Bernoulli, curva plana que puede definirse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias hacia dos puntos fijos es constante tiene por ecuación:

$$C: (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

La cual se puede expresar en coordenadas polares por la ecuación:

$$C: r^2 = 2a^2 \cos(2\theta)$$

Definición: $d_1 d_2 = a^2$



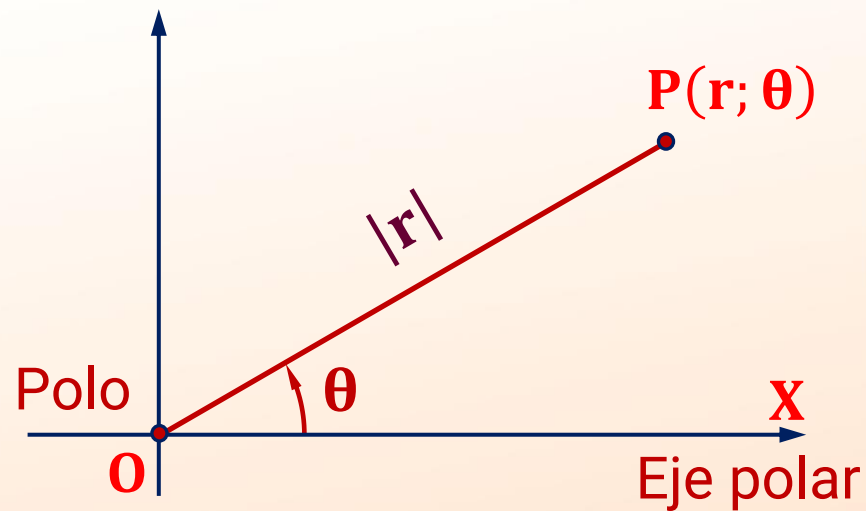
La abejas usan las matemáticas

<https://www.youtube.com/watch?v=CP4PJ-7OVI4>

Definición

Consideremos una recta en el plano denominada eje polar $\overline{OX}$ y un punto O fijo en dicha recta, denominado polo, que también se define como el origen cartesiano. Fijamos la dirección positiva del eje polar a la derecha del polo. Para cada punto P del plano consideremos el segmento $\overline{OP}$ que une el polo O con el punto P y el ángulo cuya medida es θ que hace este segmento $\overline{OP}$ con la parte positiva del eje polar.

Eje normal



r : radio vector (distancia dirigida)

θ : ángulo polar, ángulo vectorial o argumento de P

Polo : $r = 0$, para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ **Polo**: $O = (0; \theta); \forall \theta \in \mathbb{R}$

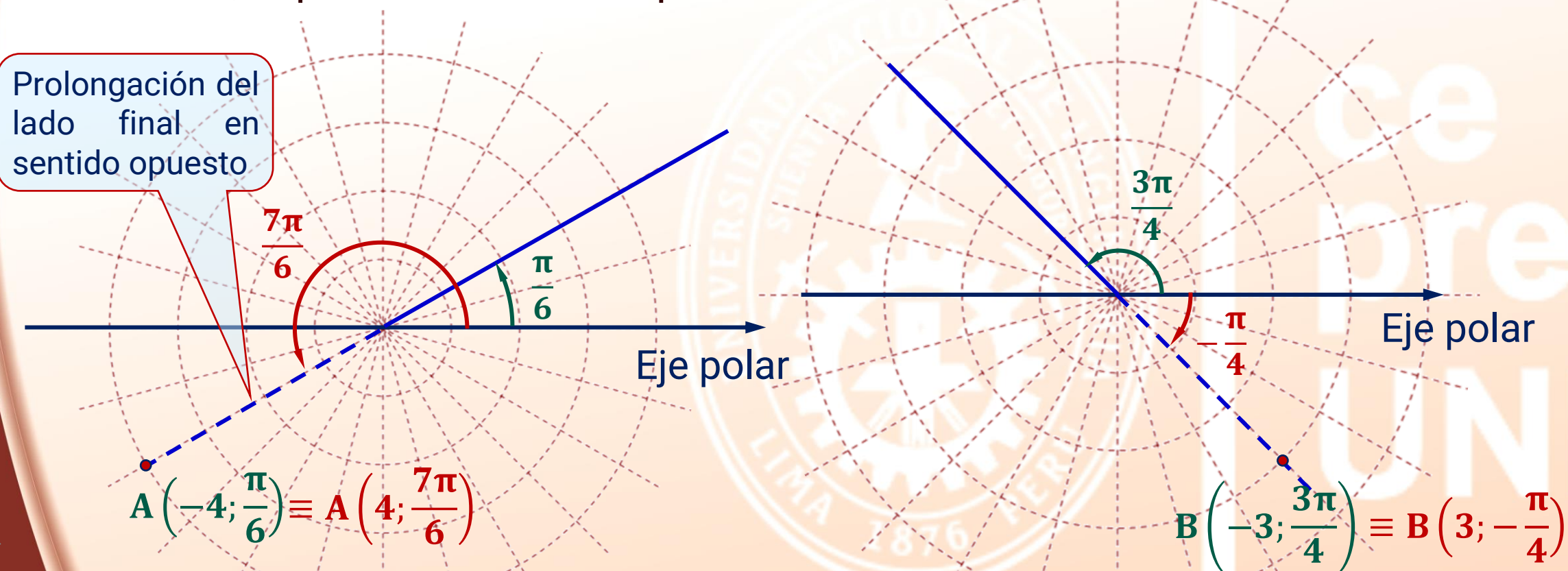
Ubicación de un punto en el Plano Polar

Convención:

Si $r > 0$, el punto P está en el lado terminal del ángulo θ .

Si $r < 0$, el punto P está en la prolongación del lado terminal del ángulo θ .

Si $r = 0$, el punto P está en el polo.



PROBLEMA 01

Dado el punto en coordenadas polares $A(2; \pi/3)$, indique cuál de los siguientes pares de coordenadas no representa a dicho punto A.

A) $\left(-2; -\frac{2\pi}{3}\right)$ D) $\left(-2; -\frac{4\pi}{3}\right)$

B) $\left(2; \frac{7\pi}{3}\right)$ E) $\left(2; \frac{13\pi}{3}\right)$

C) $\left(2; -\frac{5\pi}{3}\right)$

CLAVE: D**PROBLEMA 02**

Dado el punto en coordenadas polares $P(-6; -5\pi/4)$, indique cuál de los siguientes pares de coordenadas si representa a dicho punto P.

A) $\left(-6; \frac{\pi}{4}\right)$ D) $\left(-6; \frac{13\pi}{4}\right)$

B) $\left(-6; \frac{9\pi}{4}\right)$ E) $\left(6; \frac{13\pi}{4}\right)$

C) $\left(6; \frac{7\pi}{4}\right)$

CLAVE: C

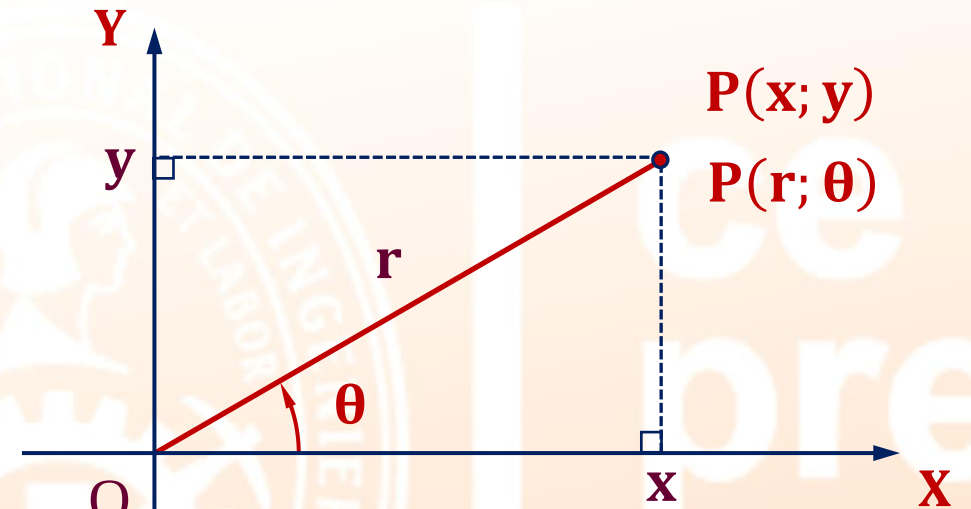
CAMBIO DE COORDENADAS POLARES A RECTANGULARES Y VICEVERSA

TEOREMA

Las coordenadas polares $(r; \theta)$ están relacionadas con las coordenadas rectangulares $(x; y)$ por las fórmulas:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \operatorname{sen}(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}, x \neq 0$$



PROBLEMA 03 (Material de estudio, ejercicio 304)

Dado los puntos en coordenadas polares, señale verdadero (V) o falso (F) según corresponda a su equivalente en coordenadas rectangulares.

I. $(6; 150^\circ) <> (3; -3\sqrt{3})$

III. $\left(-1; \frac{7\pi}{6}\right) <> \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$

II. $\left(2; \frac{\pi}{3}\right) <> (2; \sqrt{3})$

A) FFV

B) FVV

C) VFV

D) FFF

E) VVV

CLAVE: A

APLICACIÓN 04

Dado el punto $P(\sqrt{2} - \sqrt{6}; \sqrt{2} + \sqrt{6})$, en el sistema rectangular, determine sus coordenadas polares.

A) $\left(4; \frac{7\pi}{12}\right) \wedge \left(4; -\frac{13\pi}{12}\right)$

D) $\left(4; \frac{11\pi}{12}\right) \wedge \left(-4; -\frac{15\pi}{12}\right)$

B) $\left(4; \frac{7\pi}{12}\right) \wedge \left(-4; -\frac{5\pi}{12}\right)$

E) $\left(4; \frac{11\pi}{12}\right) \wedge \left(-4; -\frac{\pi}{12}\right)$

C) $\left(4; \frac{11\pi}{12}\right) \wedge \left(4; -\frac{13\pi}{12}\right)$

CLAVE: B

**PROBLEMA 05 (Material de estudio, ejercicio 308)**

Determine la ecuación polar del lugar geométrico de la ecuación rectangular $3x^2y - 3xy^2 + x^3 - y^3 = (x^2 + y^2)^2$

A) $\text{sen}(3\theta) + \cos(3\theta) = r$

B) $\text{sen}(3\theta) + \cos(3\theta) = r/2$

C) $\text{sen}(3\theta) - \cos(3\theta) = r$

D) $\text{sen}(3\theta) - \cos(3\theta) = r/2$

E) $2(\text{sen}(2\theta) - \cos(2\theta)) = r$

CLAVE: A

**PROBLEMA 06**

Determine la ecuación en coordenadas rectangulares del lugar geométrico de la ecuación polar $r^2 = 4 \cos(2\theta)$.

A) $(x^2 - y^2)^2 = 4(x^2 + y^2)$

C) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

E) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 + y^2$

B) $(x^2 - y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)$

D) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$

CLAVE: C

1. FORMAS ALTERNATIVAS DE UNA CURVA POLAR

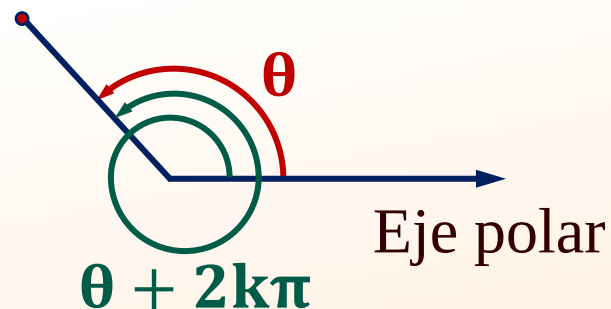
TEOREMA

Dadas las coordenadas polares del punto $P(r; \theta)$, se cumple:

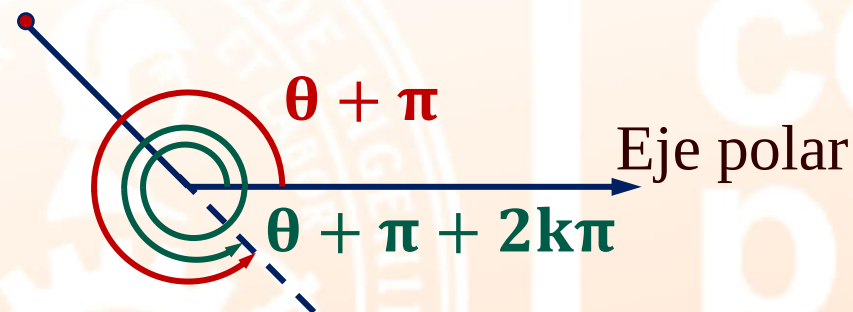
$$(r; \theta) = ((-1)^n r; \theta + n\pi), n \in \mathbb{Z}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$P(r; \theta) = P(r; \theta + 2k\pi)$$



$$P(-r; \theta + \pi) = P(-r; \theta + (2k + 1)\pi)$$



$$P(r; \theta) = \begin{cases} (r; \theta + 2k\pi), & \forall k \in \mathbb{Z} \\ (-r; \theta + (2k + 1)\pi), & \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

De forma equivalente:

$$\therefore (r; \theta) = ((-1)^n r; \theta + n\pi), n \in \mathbb{Z}$$

2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN COORDENADAS POLARES

TEOREMA

Sean $P_1(r_1; \theta_1)$ y $P_2(r_2; \theta_2)$ dos puntos dados del plano. La distancia entre dichos puntos está dada por:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

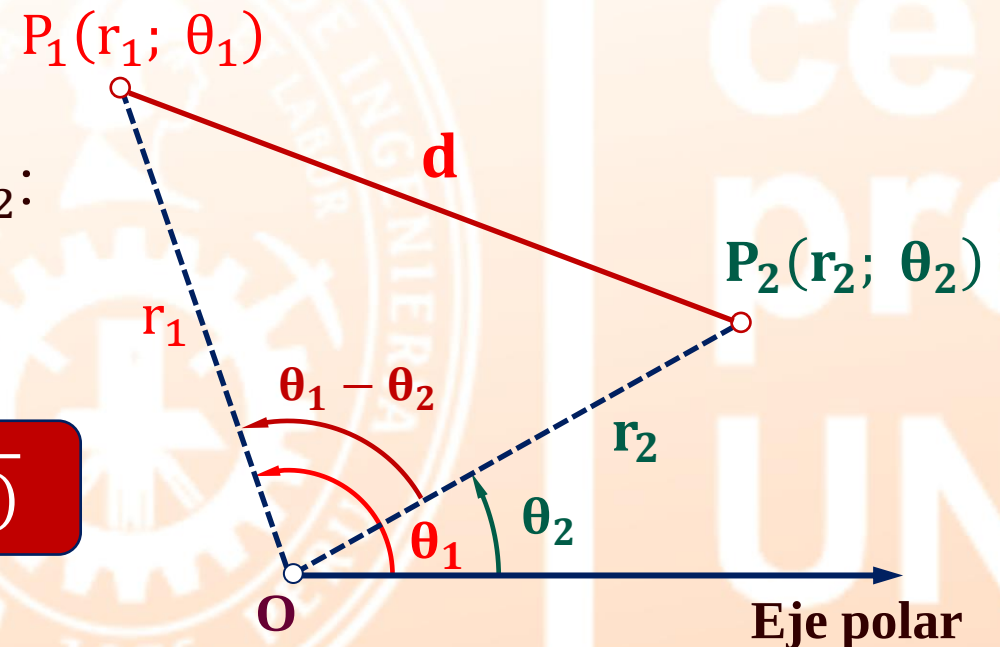
DEMOSTRACIÓN:

Graficamos:

Por el teorema de cosenos en el ΔOP_1P_2 :

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\therefore d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$



PROBLEMA 07 (Material de estudio, ejercicio 305)

Dados los puntos en coordenadas polares $P_1(4; 10^\circ)$ y $P_2(5; 70^\circ)$, calcule la distancia entre dichos puntos en (u).

A) $\sqrt{11}$

B) $\sqrt{13}$

C) $\sqrt{17}$

D) $\sqrt{21}$

E) $\sqrt{29}$

CLAVE: D

PROBLEMA 08

Si se unen los puntos $P_1(1; \pi/3)$, $P_2(\sqrt{3}; \pi/6)$ y $P_3(1; 0)$ mediante segmentos de rectas, la figura que se obtiene representa a

- A) Rectas colineales
- B) Rectas perpendiculares
- C) Triángulo equilátero
- D) Triángulo isosceles
- E) Triángulo escaleno

CLAVE: C

3. ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR EN COORDENADAS POLARES

TEOREMA

El área de la región triangular cuyos vértices son el polo O , $P_1(r_1; \theta_1)$ y $P_2(r_2; \theta_2)$ está dado por: $A_{\Delta P_1 O P_2} = \frac{1}{2} |r_1 r_2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)|$

DEMOSTRACIÓN: Graficamos:

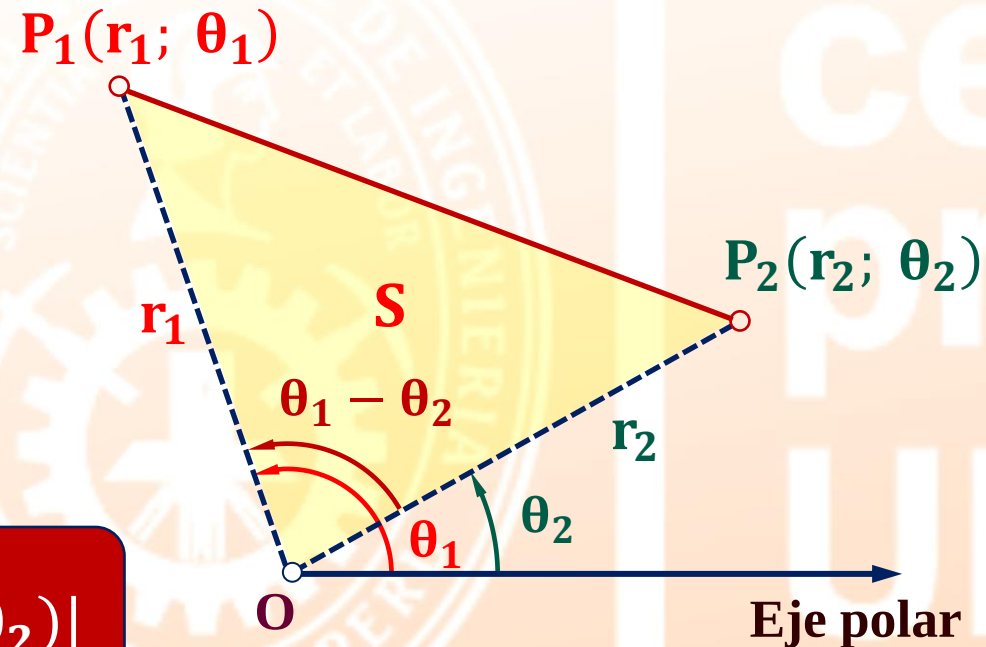
Recordemos que:

$$A_{\Delta P_1 O P_2} = \frac{(OP_1)(OP_2)}{2} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$A_{\Delta P_1 O P_2} = \frac{r_1 r_2}{2} \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

En general:

$$\therefore A_{\Delta P_1 O P_2} = \frac{1}{2} |r_1 r_2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)|$$



PROBLEMA 09

Si el área de la región triangular cuyos vértices en coordenadas polares son $A(5; 20^\circ)$, $B(7; 50^\circ)$ y $C(6; 140^\circ)$ está dada por $0.25(p + q\sqrt{3})$, calcule $p + q$.

- | | |
|-------|-------|
| A) 81 | D) 87 |
| B) 83 | E) 89 |
| C) 85 | |

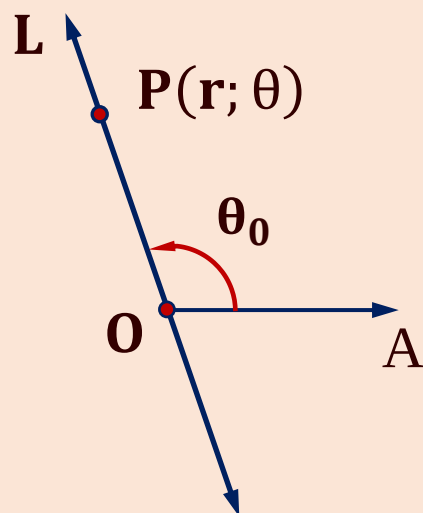
CLAVE: E

4. ECUACIÓN DE LA RECTA EN COORDENADAS POLARES

4.a) Recta que contiene al polo

Si una recta L pasa por el polo, su ecuación polar es de la forma:

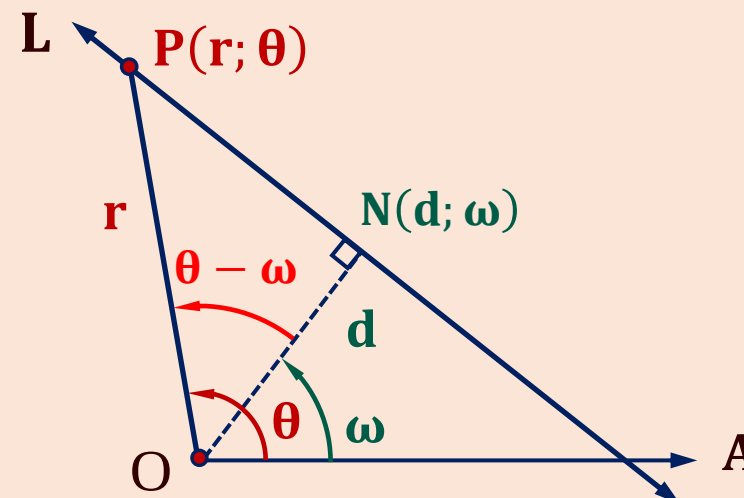
$$L: \theta = \theta_0$$



4.b) Recta que no contiene al polo

Si $N(d; \omega)$ es el par principal de coordenadas polares del pie de la perpendicular trazada desde el polo a una recta, que no pasa por el polo, entonces la ecuación polar de dicha recta es:

$$L: r \cos(\theta - \omega) = d$$



PROBLEMA 10 (EXAMEN FINAL CEPRE UNI 2015 - II)

Determine la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $(2; 150^\circ)$ y es perpendicular a la recta que une el punto $(2; 150^\circ)$ con el polo.

A) $r \sin(\theta - 150^\circ) = 2$

B) $r \cos(\theta - 90^\circ) = 1$

C) $r \sin(\theta - 90^\circ) = 1$

E) $r \cos(\theta - 75^\circ) = 2$

D) $r \cos(\theta - 150^\circ) = 2$

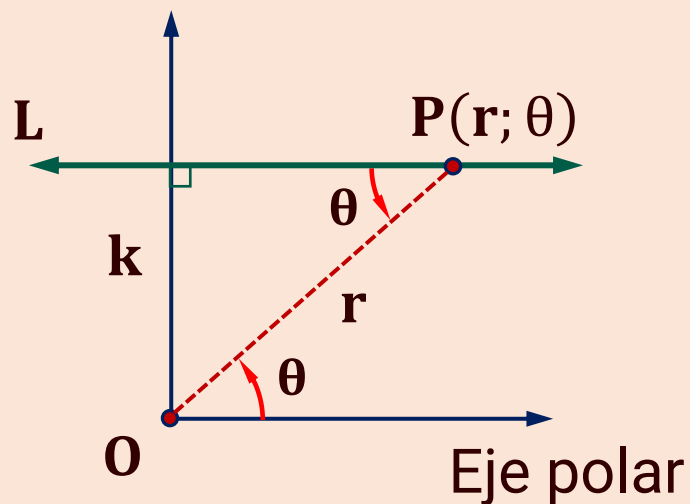
CLAVE: D

4. ECUACIÓN DE LA RECTA EN COORDENADAS POLARES

4.c) Recta paralela al eje polar

Dada la recta $L: y = k$, $k \neq 0$
su ecuación polar es:

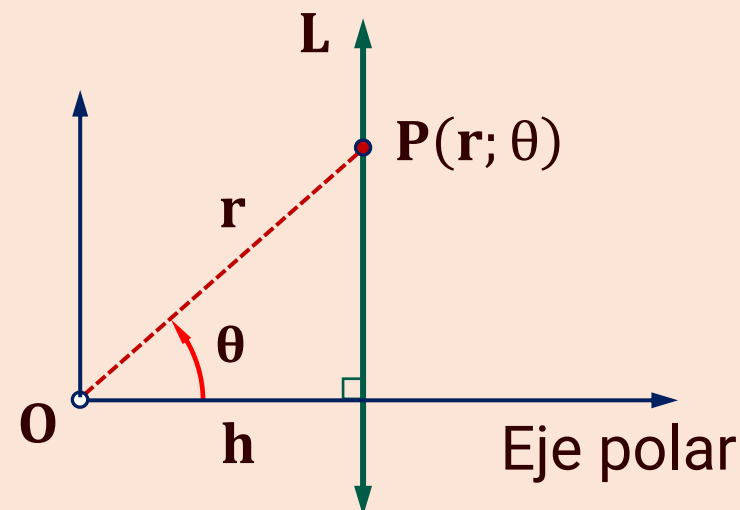
$$L: r = k \csc(\theta)$$



4.d) Recta paralela al eje normal

Dada la recta $L: x = h$, $h \neq 0$
su ecuación polar es:

$$L: r = h \sec(\theta)$$



PROBLEMA 11

Determine la ecuación polar de la recta que pasa por el punto $(2; 3\pi/4)$ y es perpendicular al eje polar.

A) $r \cos(\theta) - \sqrt{2} = 0$

B) $r \cos(\theta) + \sqrt{2} = 0$

C) $r \sin(\theta) - \sqrt{2} = 0$

E) $r \cos(\theta) + 2 = 0$

D) $r \sin(\theta) + \sqrt{2} = 0$

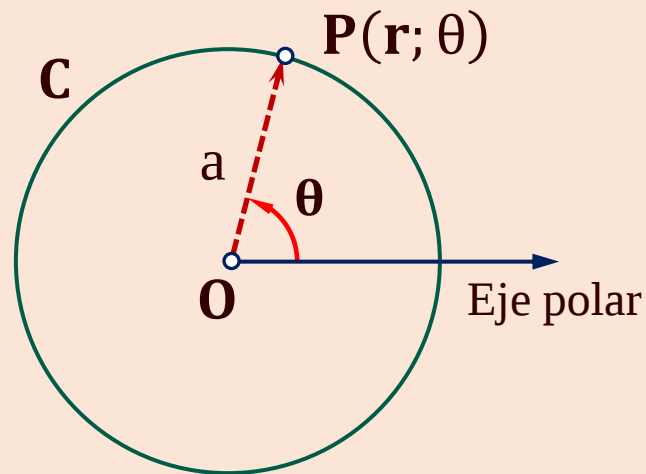
CLAVE: B

5. ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN COORDENADAS POLARES

5.a) Con centro en el polo y radio a u

La ecuación de una circunferencia C con centro en el polo y radio de longitud a tiene ecuación de la forma

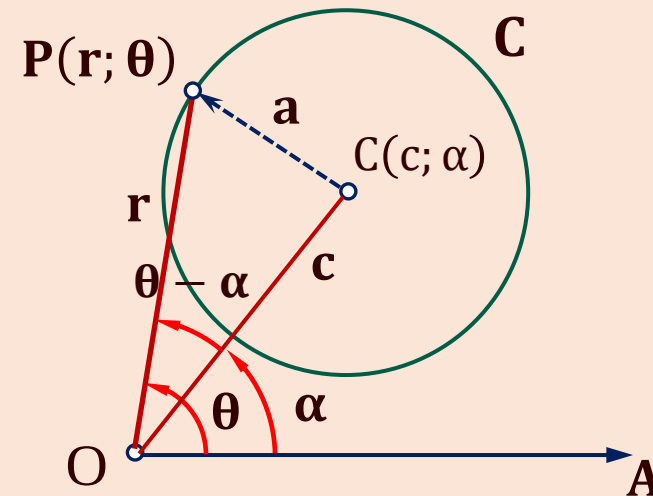
$$C: r = \pm a, \quad a > 0$$



5.b) Con centro en $(c; \alpha)$ y radio a u

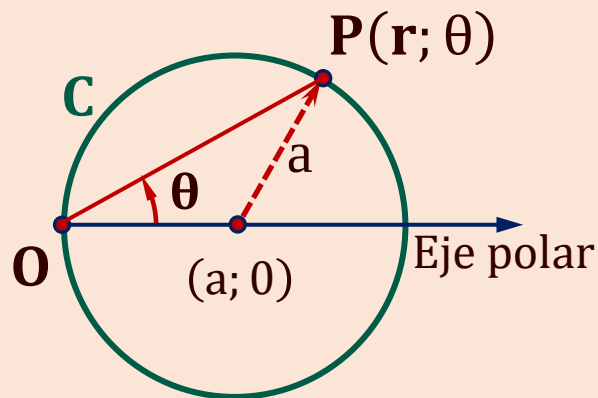
La ecuación de una circunferencia C con centro en $(c; \alpha)$ y radio de longitud a tiene ecuación de la forma

$$C: r^2 - 2cr \cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2, \quad a > 0$$



5. ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN COORDENADAS POLARES

5.c) Circunferencia que pasa por el polo y tiene centro en el eje polar



$$\begin{aligned} C: (x - a)^2 + y^2 &= a^2 \\ \Rightarrow C: x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= a^2 \\ \Rightarrow C: x^2 + y^2 &= 2ax \\ \Rightarrow C: r^2 &= 2ar \cos(\theta) \end{aligned}$$

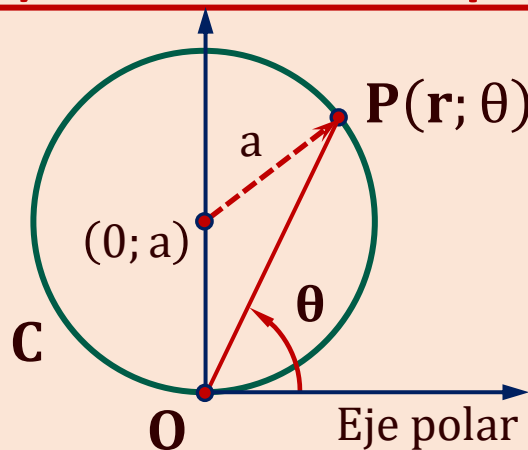
$$\Rightarrow C: \underbrace{r = 2a \cos(\theta)}_{\text{Incluye al polo}} \vee r = 0$$

Incluye al polo

Finalmente:

$$C: r = \pm 2a \cos(\theta), a > 0$$

5.d) Circunferencia que pasa por el polo y tiene centro en el eje normal



$$\begin{aligned} C: x^2 + (y - a)^2 &= a^2 \\ \Rightarrow C: x^2 + y^2 - 2ay + a^2 &= a^2 \\ \Rightarrow C: x^2 + y^2 &= 2ay \\ \Rightarrow C: r^2 &= 2ar \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C: \underbrace{r = 2a \sin(\theta)}_{\text{Incluye al polo}} \vee r = 0$$

Incluye al polo

Finalmente:

$$C: r = \pm 2a \sin(\theta), a > 0$$

PROBLEMA 12

Calcule el área, en u^2 , de la región interior a la curva A) 11π B) 12π C) 13π
polar $C_1: r = 4$ u y exterior a la curva $C_2: r = 2 \cos(\theta)$. D) 14π E) 15π

CLAVE: E

6. ECUACIÓN DE LAS CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES

Sea L_F el eje focal de una cónica, uno de sus focos es el polo O y L_D es la recta directriz.

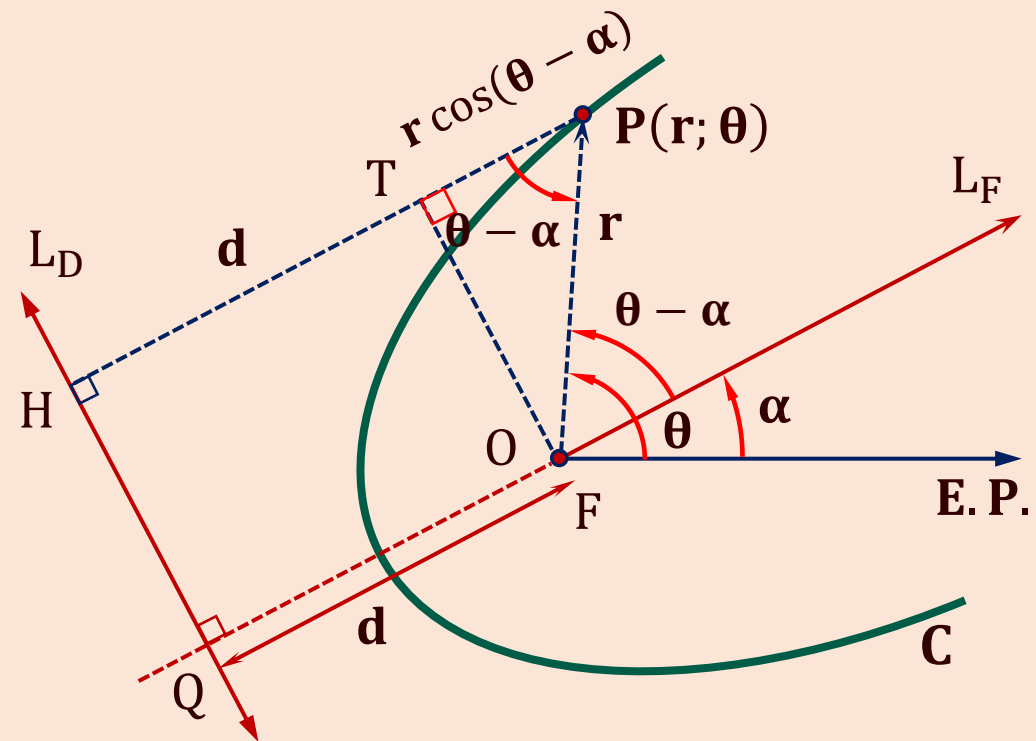
Si la excentricidad de la cónica es e y la distancia de la recta directriz al polo es d :

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, L_D)} \Rightarrow e = \frac{r}{d + r \cos(\theta - \alpha)}$$

$$\Rightarrow ed + er \cos(\theta - \alpha) = r$$

$$\Rightarrow ed = r - er \cos(\theta - \alpha)$$

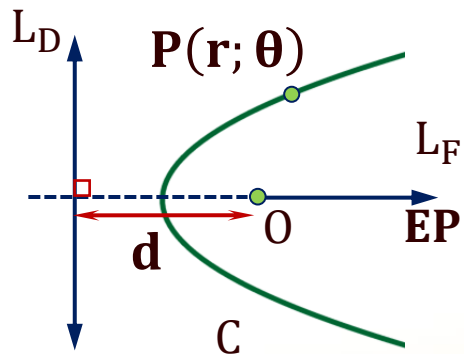
$$\Rightarrow ed = r(1 - e \cos(\theta - \alpha))$$



$$\therefore r = \frac{ed}{1 - e \cos(\theta - \alpha)}$$

Casos particulares cuando un foco está en el polo

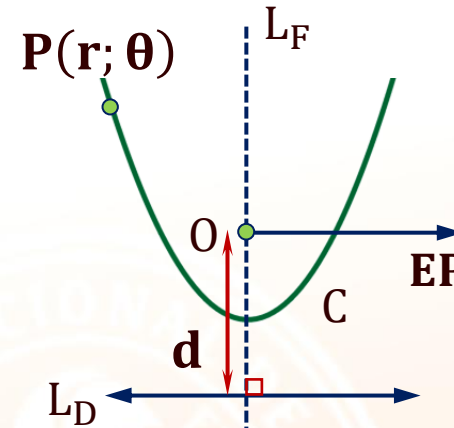
6.a) $\alpha = 0^\circ$



$$C: r = \frac{e \cdot d}{1 - e \cdot \cos(\theta)}$$

$$L_D: r = -d \sec(\theta)$$

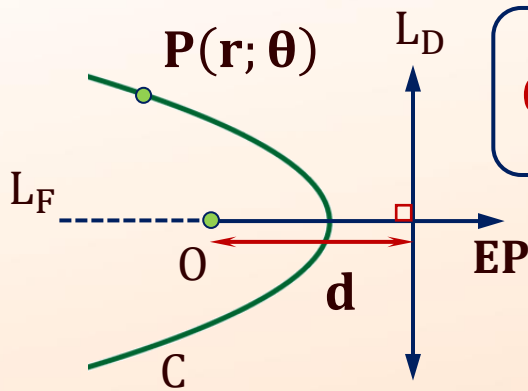
6.b) $\alpha = 90^\circ$



$$C: r = \frac{e \cdot d}{1 - e \cdot \sin(\theta)}$$

$$L_D: r = -d \csc(\theta)$$

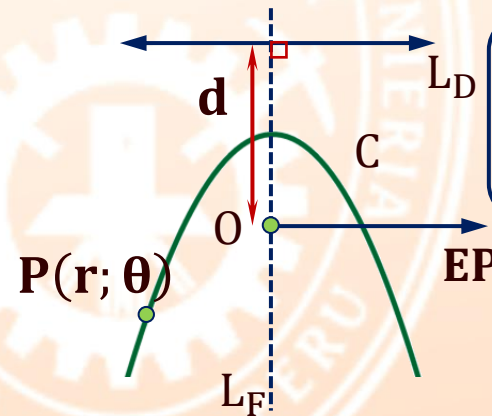
6.c) $\alpha = 180^\circ$



$$C: r = \frac{e \cdot d}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$$

$$L_D: r = d \cdot \sec(\theta)$$

6.d) $\alpha = 270^\circ$



$$C: r = \frac{e \cdot d}{1 + e \cdot \sin(\theta)}$$

$$L_D: r = d \cdot \csc(\theta)$$

PROBLEMA 13 (Material de estudio, ejercicio 314)

Dada la ecuación de una cónica en coordenadas polares como

$$r = \frac{8}{a - b \cos(\theta)} \quad \text{Indique verdadero (V) o falso (F).}$$

I. Si $a > b > 0$ la ecuación es de una elipse

II. Si $a = b > 0$ la ecuación es de una parábola

III. Si $ab = 1$ la ecuación es de una hipérbola.

A) VVV

B) VVF

C) VFV

D) FVV

E) VFF

CLAVE: B

PROBLEMA 14

Calcule la excentricidad de la cónica: $r = -\frac{5}{\csc\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}\right)}$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) 1

D) $\sqrt{3}$

E) 2

CLAVE: E

PROBLEMA 15

Sea la ecuación polar de la cónica

$$r = \frac{5}{2 + 4\text{sen}(\theta)}$$

Calcule la longitud (en u) de su lado recto.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: E

PROBLEMA 16 (EXAMEN ADMISION UNI 2014 - II)

Determine la cónica que representa la ecuación polar

$$r = \frac{8}{4 + 3 \cos(\theta)}$$

A) Hipérbola

B) Parábola

C) Elipse

D) Circunferencia

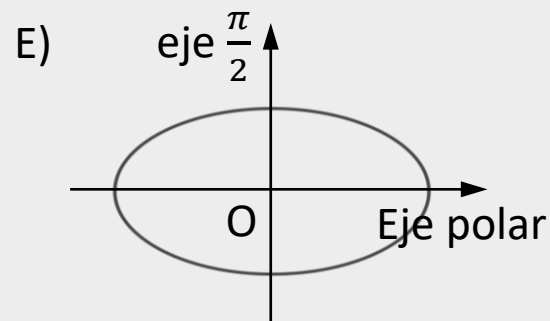
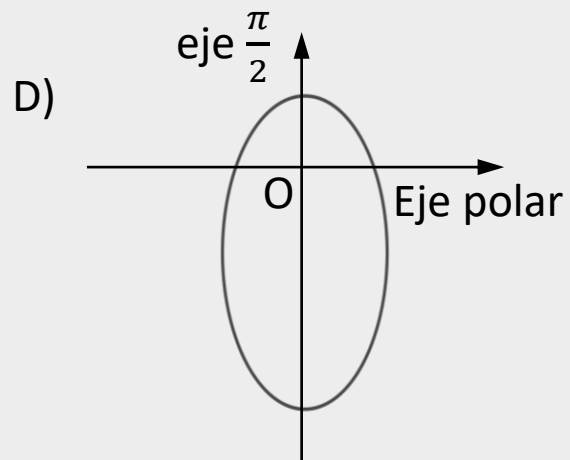
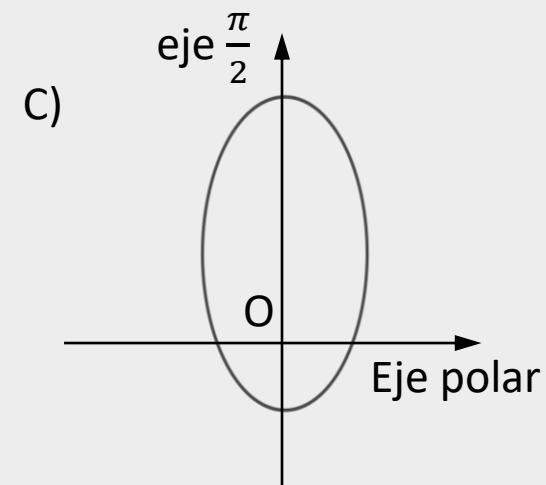
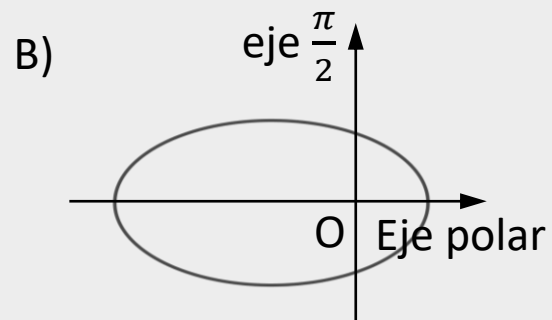
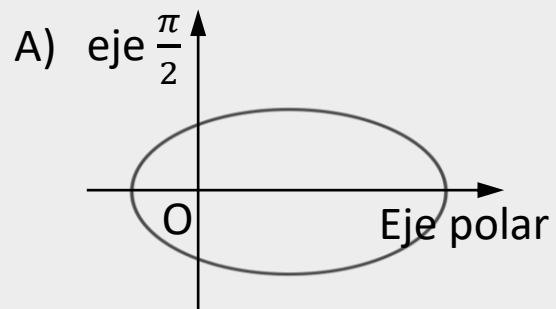
E) Un punto

CLAVE: C

PROBLEMA 17

Determine el grafico de la cónica descrita por

$$r = \frac{9}{3 - 2 \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)}$$

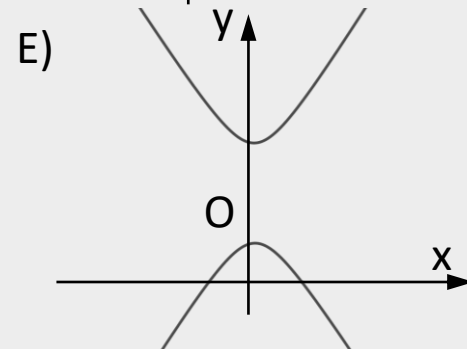
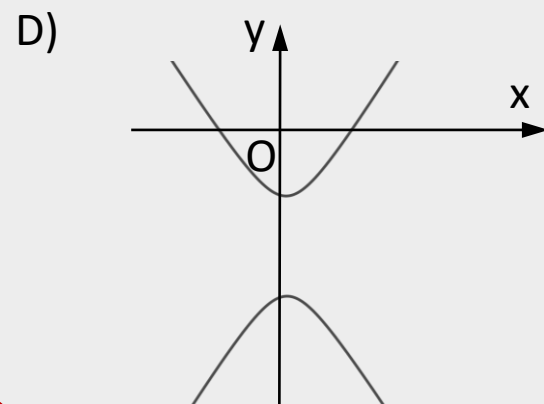
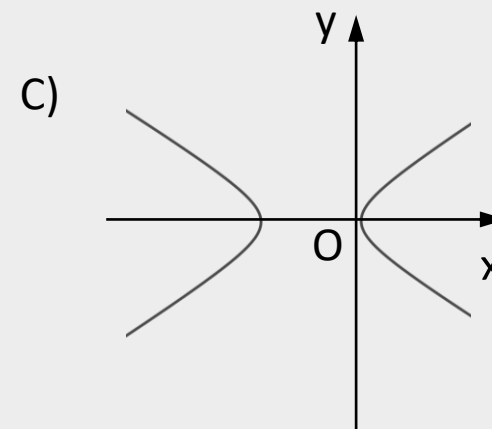
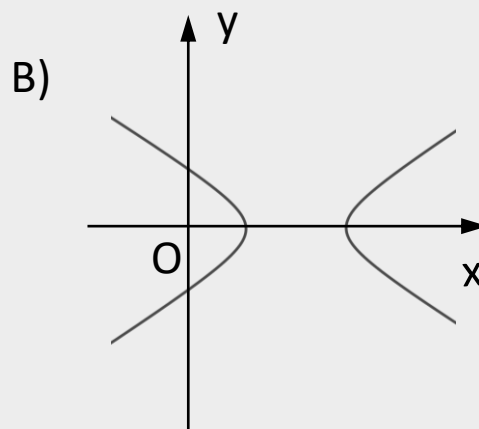
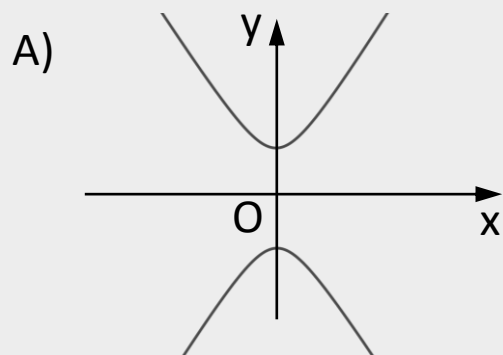


CLAVE: A

PROBLEMA 18

Determine el grafico de la cónica descrita por

$$r = \frac{3}{1 + 2 \operatorname{sen}(\theta + \pi)}$$



CLAVE: D

PROBLEMA 19

Se tiene una cónica cuya ecuación en coordenadas polares es:

$$\frac{r^2}{4} = \tan(\theta) + \cot(\theta)$$

Calcule la longitud de su lado recto.

- A) 8 B) 4 C) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

CLAVE: D

7. ECUACIONES EQUIVALENTES EN COORDENADAS POLARES

TEOREMA

Para determinar las ecuaciones equivalentes de una ecuación polar sustituimos: $C: F(r; \theta) = 0 \equiv F((-1)^n r; \theta + n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$

EJEMPLO: Determine las ecuaciones equivalente a $C: r = 1 + \cos(\theta)$

RESOLUCIÓN: Sustituimos $(r; \theta)$ con $((-1)^n r; \theta + n\pi)$

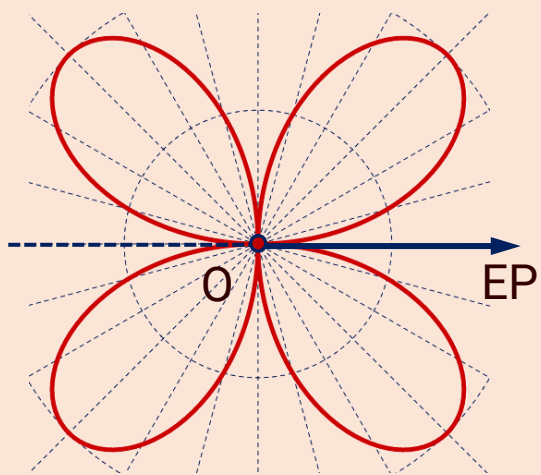
En la ecuación: $(-1)^n r = 1 + \cos(\theta + n\pi)$

- 1) n par: $n = 2k \Rightarrow C: (-1)^{2k} r = 1 + \cos(\theta + 2k\pi) \Rightarrow \mathbf{C_1: r = 1 + \cos(\theta)}$
- 2) n impar: $n = 2k + 1 \Rightarrow C: (-1)^{2k+1} r = 1 + \cos(\theta + (2k + 1)\pi) \Rightarrow C: -r = 1 - \cos(\theta)$
 $\Rightarrow \mathbf{C_2: r = -1 + \cos(\theta)}$

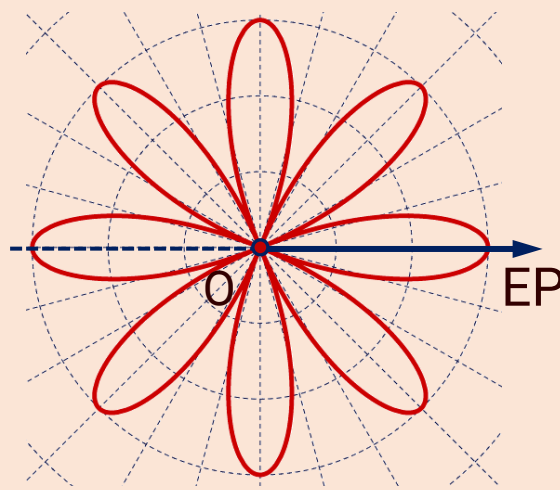
$\therefore$ Las ecuaciones $C_1: r = 1 + \cos(\theta)$ y $C_2: r = -1 + \cos(\theta)$ representan el mismo lugar geométrico.

8. ROSAS O ROSACEAS

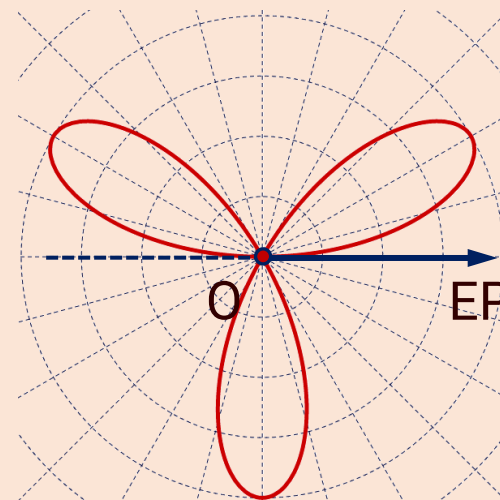
$$\begin{cases} r = \pm a \cos(n\theta) & \text{Rosa de } n \text{ pétalos (n: impar)} \\ r = \pm a \sen(n\theta) & \text{Rosa de } 2n \text{ pétalos (n:par)} \end{cases}$$



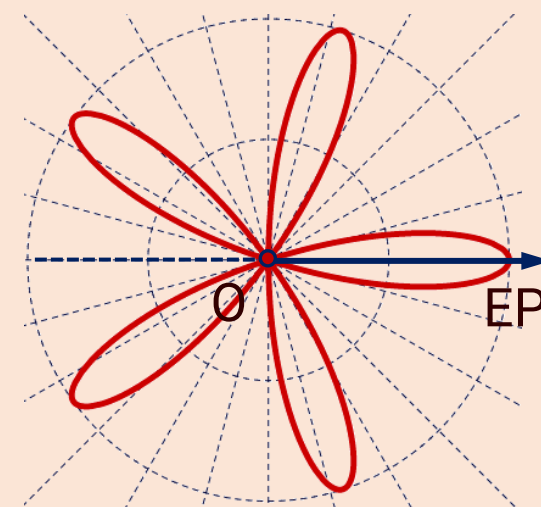
$$r = 2 \sen(2\theta)$$



$$r = 3 \cos(4\theta)$$



$$r = 4 \sen(3\theta)$$



$$r = 2 \cos(5\theta)$$

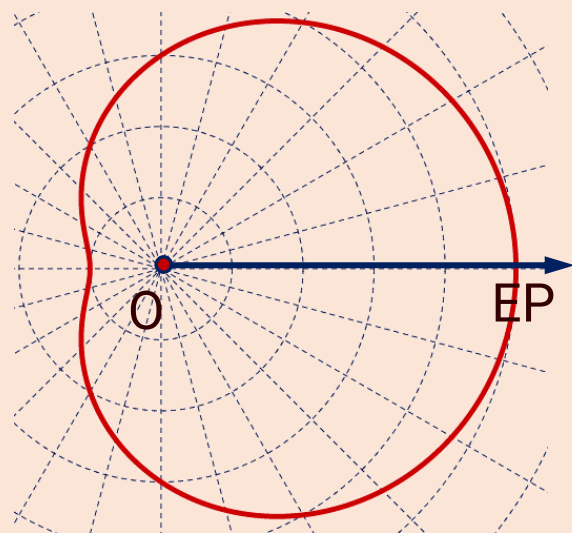
9. OTRAS CURVAS

$$r = \pm a \pm b \cos(\theta)$$

$$r = \pm a \pm b \sin(\theta) \quad ; a, b > 0$$

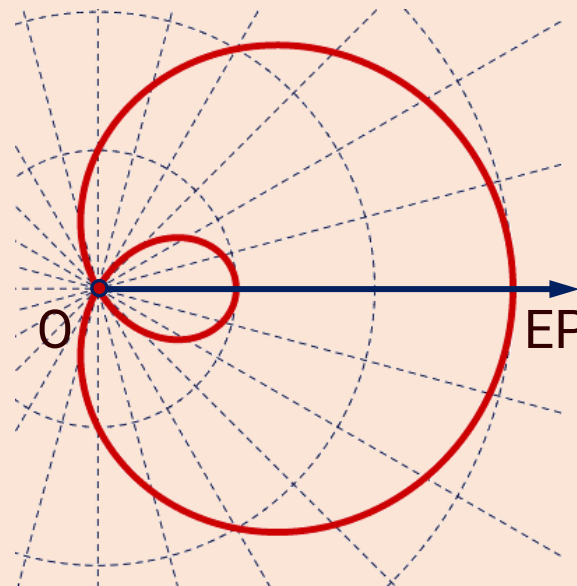
Limacón: $a > b$

Ejemplo: $r = 3 + 2 \cos(\theta)$



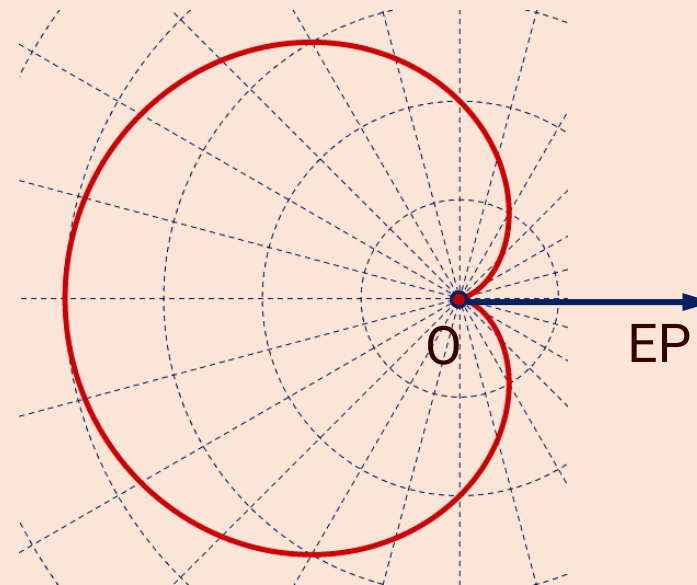
Caracol: $a < b$

Ejemplo: $r = 1 + 2 \cos(\theta)$



Cardioide: $a = b$

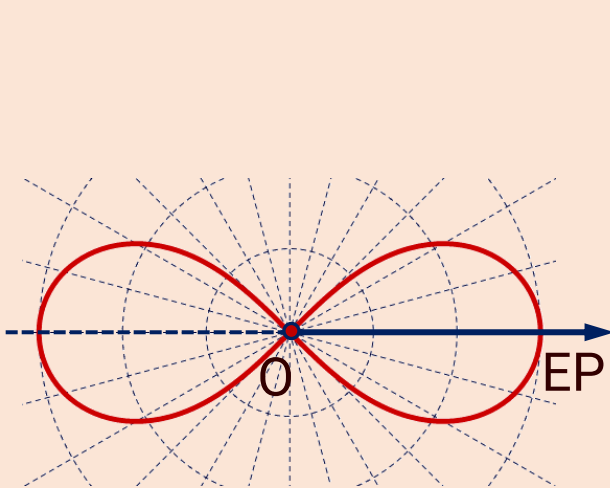
Ejemplo: $r = 2 - 2 \cos(\theta)$



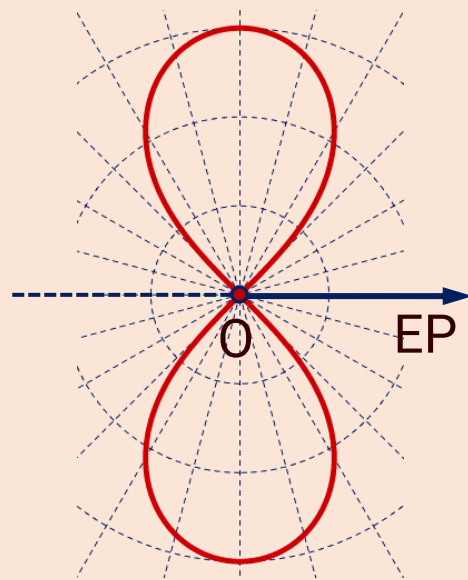
10. LEMNISCATA DE BERNOULLI:

$$r^2 = \pm a^2 \cos(2\theta)$$

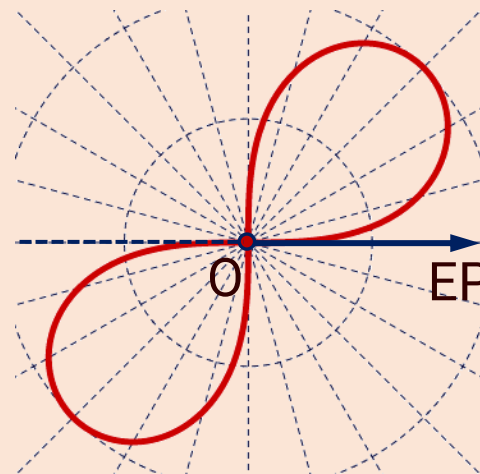
$$r^2 = \pm a^2 \text{sen}(2\theta)$$



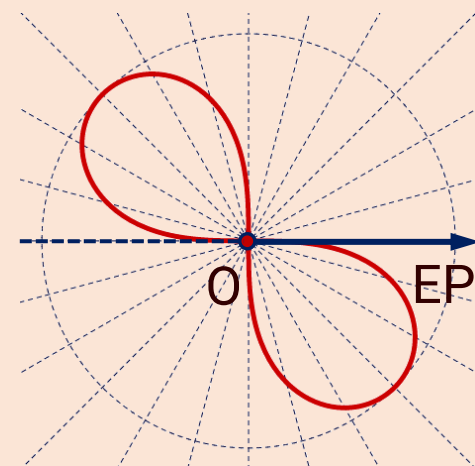
$$r^2 = 9 \cos(2\theta)$$



$$r^2 = -4 \cos(2\theta)$$



$$r^2 = 4 \text{sen}(2\theta)$$



$$r^2 = -\text{sen}(2\theta)$$

PROBLEMA 20

Determine el lugar geométrico descrito por los puntos del plano cartesiano, tales que el producto de distancias de todo punto $P(r; \theta)$, en coordenadas polares, a los puntos $R(1; 0)$ y $S(1; \pi)$ sea una constante e igual a 1.

A) $r^2 = 8 \cos(\theta)$

D) $r^2 = 8 \sin(2\theta)$

B) $r^2 = 4 \cos(2\theta)$

C) $r^2 = 2 \cos(2\theta)$

E) $r^2 = 4 \sin(2\theta)$

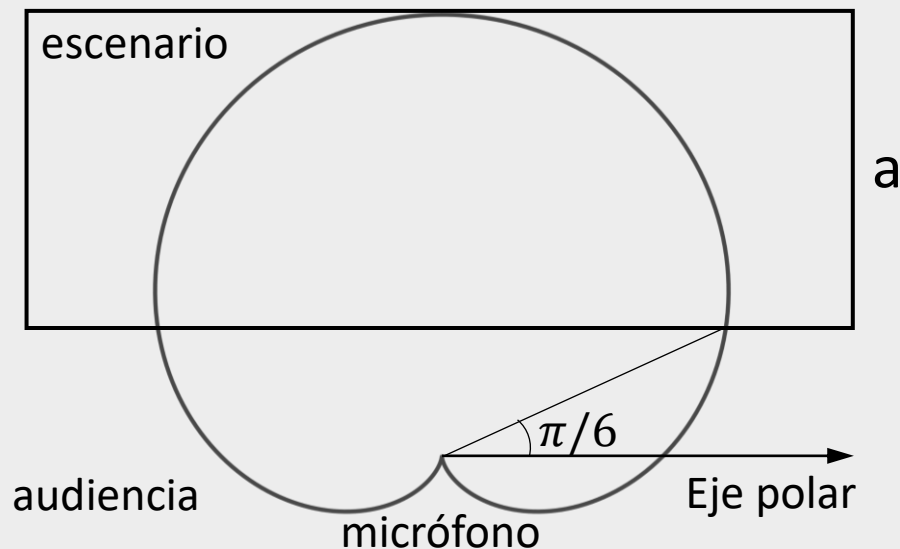
CLAVE:C

PROBLEMA 21

Cuando se graban programas en vivo, frecuentemente, los ingenieros de sonido utilizan un micrófono con fonocaptor en forma de cardioide. Debido a que suprime el ruido de la audiencia. Si se coloca el micrófono en el punto indicado y la frontera optima esta dado por el cardioide

$$r = 8 + 8\text{sen}(\theta)$$

Calcule el valor de a (en u)



A) 4

D) 10

B) 6

E) 12

C) 8

CLAVE: D

PROBLEMA 22

Dada una cónica de excentricidad e y tal que la longitud del lado recto es LR . Calcule la longitud de una cuerda focal que forma un ángulo de medida θ con el eje focal de la cónica.

A) $\frac{LR}{1 + e \cdot \cos(\theta)}$

B) $\frac{LR}{1 + e^2 \cos^2(\theta)}$

C) $\frac{LR}{1 - e^2 \cos^2(\theta)}$

D) $\frac{LR}{e \cdot \cos(\theta)}$

E) $\frac{LR}{e^2 \cos^2(\theta)}$

CLAVE:C